



CLASA A XI-A
PROFIL TEHNIC ȘI SERVICII, RESURSE NATURALE, PROTECȚIA MEDIULUI

1. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$. Să se arate că matricea $(AB - BA)^2$ are cel puțin două elemente nule.

2. Se consideră matricele $H(a, x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 2 \\ 1 & 1 & x \\ a & a & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

- a) Calculați determinantul matricei $H(1, 2)$.
b) Determinați B^3 , unde $B = H(0, 0)$.
c) Arătați că, pentru orice $a \in \mathbb{R}$, există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\det H(a, x) = 0$.

3. i) Să se calculeze limitele laterale ale funcției de mai jos în punctul $x_0 = 3$:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-3}}}, & \text{dacă } x \neq 3 \\ 2, & \text{dacă } x = 3 \end{cases}$$

- ii) Calculați următoarele limite: a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 1})$;

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - x}$;

4. i) Să se determine $a \in \mathbb{R}$, pentru care are loc egalitatea: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2^x + 4^x}{2 \cdot 2^x + 3 \cdot 4^x} = \frac{3}{8}$.

- ii) Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ și $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Să se determine $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) + g(x^2) + x^{2010}}{x^{2009}}$.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare problemă se punctează de la 0 la 7 puncte.